محاضرة رياضة 11

Fuzzy Complement

$$C : [0,1] \longrightarrow [0,1]$$

$$C : \mu_A(x) \longrightarrow \mu_{\bar{A}}(x)$$

$$C[\mu_A(x)] = \mu_{\bar{A}}(x)$$

← في هذا الجزء ندرس بعض المؤثرات لتعيين قيمة المكملة بحيث أنه من خلالها يمكن توسيع أو تصغير مكملة الفئة بمعنى

→ Axiom of Complement

① $C(0) = 1 \quad ; \quad C(1) = 0$.

② $a < b \quad ; \quad a, b \in [0,1] \Rightarrow C(b) \leq C(a)$.

if $a = \mu_A(x) \quad ; \quad b = \mu_A(y)$

$$\mu_A(x) \leq \mu_A(y) \Rightarrow C[\mu_A(x)] \geq C[\mu_A(y)]$$

③ c is continous function.

④ $c\left[c(a)\right] = a \quad , \quad a = \mu_A(x)$

$$c\left[c(\mu_A(x))\right] = \mu_A(x)$$

ـــــ من خلال الخواص 1، 2، 3، 4 يمكن تعريف أي دالة تصلح
أن تكون معبرة عن درجة الإنتماء المكملة بشرط تحقيقها
للأربع خواص.

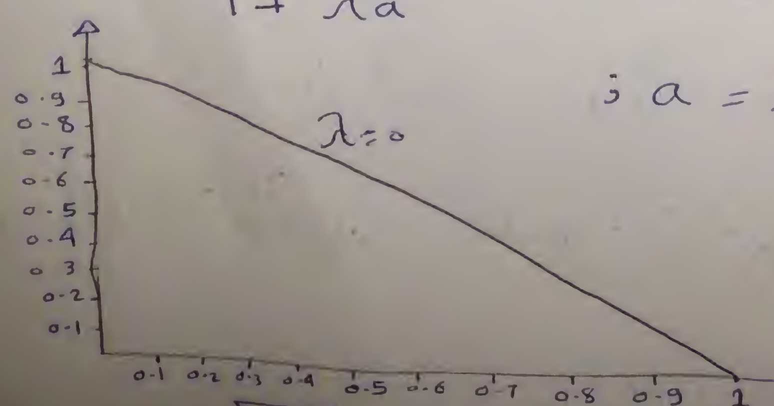
~~[illegible] بالشكل ده~~

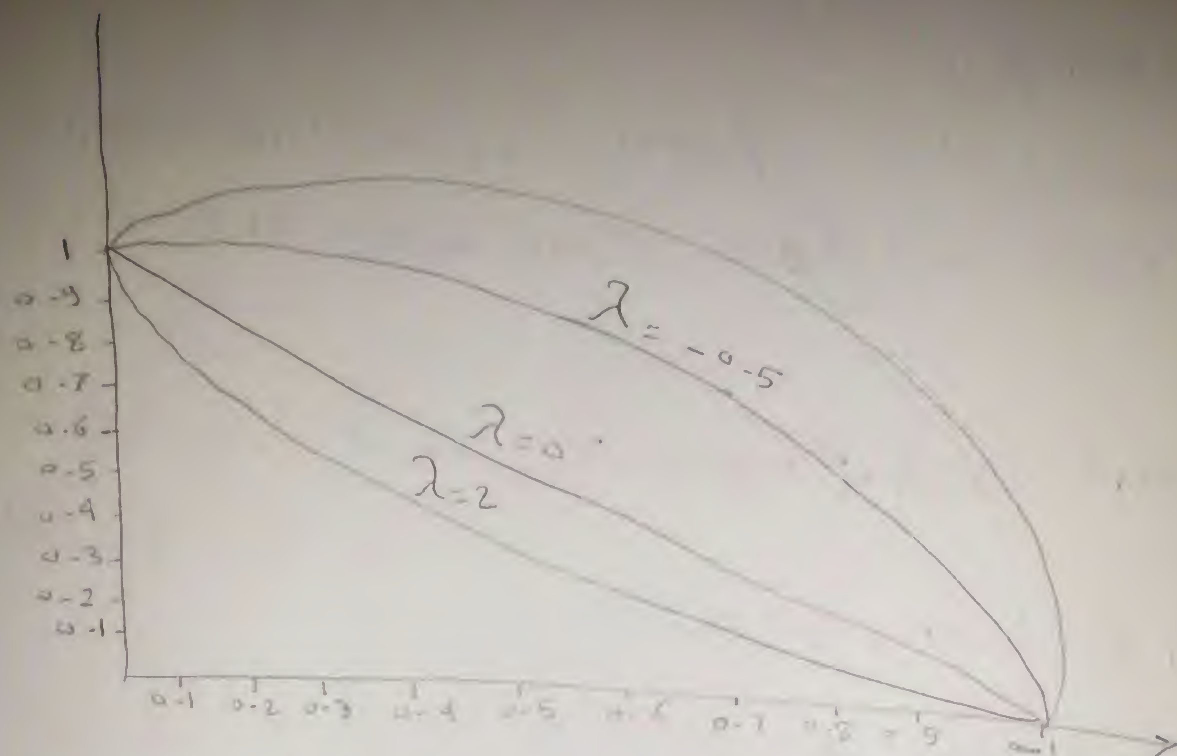
ـــــ عندما يعطى أي دالة والمطلوب أن تكون مؤثر
المكملة لابد أن نتحقق من الشرط 1، 2.

$\boxed{1}$ sugeno fuzzy complements class:-

$$C_\lambda(a) = \frac{1-a}{1+\lambda a} \quad ; \quad -1 < \lambda < \infty$$

$$; \quad a = \mu_A(x)$$

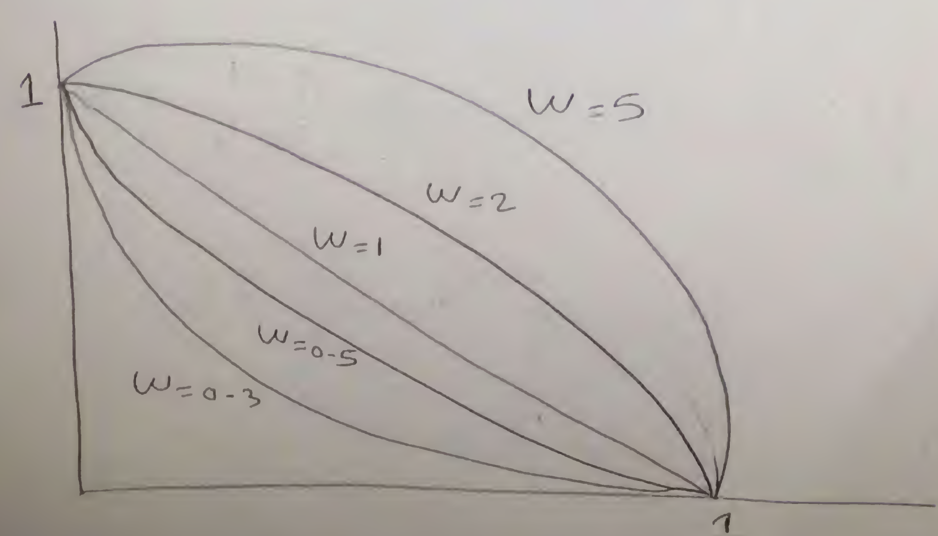




[2] Yager fuzzy Complement class

$$C_w(a) = (1 - a^w)^{1/w} \qquad 0 < w < \infty$$

$$a = \mu_A(x)$$



[3] Lec 14

Example

* show that Yager fuzzy Complement and sugeno satisfies Complement Axioms.

ـــ نحاول توضيح أن طريقة (Sugeno) وطريقة (Yager)
تحقق الشروط:

$\boxed{1}$ $c(1) = 0 \; ; \; c(0) = 1$

$\boxed{2}$ $a = \mu_A(x) \; , \; b = \mu_A(y)$

$$a \leq b \Rightarrow c(a) \geq c(b)$$

$\boxed{A}$ sugeno

$$C_\lambda(a) = \frac{1-a}{1+\lambda a} \quad ; \quad a = \mu_A(x)$$

$$c(0) = \frac{1-0}{1+0} = 1 \quad ; \quad c(1) = \frac{1-1}{1+\lambda} = 0$$

$$a \leq b \Rightarrow \lambda a \leq \lambda b \quad ; \quad \lambda > 0$$

$$1 + \lambda a \leq 1 + \lambda b$$

$$\frac{1}{1+\lambda a} \geq \frac{1}{1+\lambda b} \longrightarrow (1)$$

$a \leq b \Rightarrow -a \geq -b \Rightarrow 1-a \geq 1-b \longrightarrow (2)$

Multiply (1) , (2)

$$\frac{1-a}{1+\lambda a} \geq \frac{1-b}{1+\lambda b}$$

$c(a) \geq c(b)$

then sugeno satisfy axioms. #

$\boxed{B}$ Yager Complement

$C_w(a) = (1-a^w)^{1/w}$

$\rightarrow C_w(0) = (1-0^w)^{1/w} = 1$

$C_w(1) = (1-1^w)^{1/w} = 0$

$\rightarrow a \leq b \Rightarrow C_w(a) \geq C_w(b)$

$a \leq b \Rightarrow a^w \leq b^w \Rightarrow -a^w \geq -b^w$

$\Rightarrow 1-a^w \geq 1-b^w \Rightarrow (1-a^w)^{1/w} \geq (1-b^w)^{1/w}$

$\therefore \; C_w(a) \geq C_w(b)$

then Yager satisfy the axioms #

---

* Consider the fuzzy set

$A = \frac{0.1}{1} + \frac{0.2}{2} + \frac{0.6}{3}$ find

$\boxed{1}$ Sugeno fuzzy Complements class at

$\lambda = 0.5 \; ; \; \lambda = 1$

$\left(\text{Sugeno}(\bar{A})\right)_{\lambda=0.5} \; , \; \left(\text{Sugeno}(\bar{A})\right)_{\lambda=1}$

$\boxed{2}$ Compare α-cutts of sugeno class

at $\alpha = 0.4 \; ; \; \lambda = 0.5 \; ; \; \lambda = 1 \; ; \; \lambda = 0$

الواجب حلها بواسطة (Yager)

Solution

$$C_\lambda\left(\mu_A(x)\right) = \frac{1-\mu_A(x)}{1+\lambda\,\mu_A(x)}$$

at: $\lambda = 0.5$

$$\bar{A} = \frac{\left[\mu_{\bar{A}}(1)\right]_{\lambda=0.5}}{1} + \frac{\left[\mu_{\bar{A}}(2)\right]_{\lambda=0.5}}{2} + \frac{\left[\mu_{\bar{A}}(3)\right]_{\lambda=0.5}}{3}$$

$$\frac{\left[\mu_{\bar{A}}(1)\right]_{\lambda=0.5}}{1} = \frac{1-0.1}{1+(0.5)(0.1)} = 0.857$$

$$\frac{\left[\mu_{\bar{A}}(2)\right]_{\lambda=0.5}}{2} = \frac{1-0.2}{1+(0.5)(0.2)} = 0.727$$

$$\frac{\left[\mu_{A}(3)\right]_{\lambda=0.5}}{3} = \frac{1-0.6}{1+(0.5)(0.6)} = 0.308$$

$$\bar{A} = \frac{0.857}{1} + \frac{0.727}{2} + \frac{0.308}{3}$$

← في الصفحة السابقة كسرنا مفهوم ان مكملة انتماء
أى عنصر لازم نطرحه من (1) هنا لو جمعنا العنصر
ومكملة قد يكون = أو < أو > ال 1 على حسب λ.

$\lambda = 1$

$$\bar{A} = \frac{\left[\mu_{\bar{A}}(1)\right]_{\lambda=1}}{1} + \frac{\left[\mu_{\bar{A}}(2)\right]_{\lambda=1}}{2} + \frac{\left[\mu_{\bar{A}}(3)\right]_{\lambda=1}}{3}$$

← حسبناه علطول :

$$\bar{A} = \frac{0.818}{1} + \frac{0.666}{2} + \frac{0.25}{3}$$

$\boxed{2}$ α-cutts of $\bar{A}$ at $\lambda = 0.5$

$$0.4\text{-}\left(\text{Sugeno}(\bar{A})\right)_{\lambda=0.5} = \{1, 2\}$$

$$0.4\text{-}\left(\text{Sugeno}(\bar{A})\right)_{\lambda=1} = \{1, 2\}$$

ـــ نلاحظ أنه عند زيادة قيمة λ وتثبيت قيمة α

فإن الفصول الناتجة يزداد العناصر فيها.

→ α-cutts of $\bar{A}$ at $\lambda=0$

0.4- $\left(\text{Sugeno}(\bar{A})\right)_{\lambda=0} = \{1,2,3\}$

Cause: $\left(\text{Sugeno}(\bar{A})\right)_{\lambda=0} = 1-\bar{A} = \frac{0.9}{1} + \frac{0.8}{2} + \frac{0.4}{3}$

Fuzzy union (S-norms)

$$S : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow [0,1]$$

$$S\left[\mu_A(x), \mu_B(x)\right] = \mu_{A\cup B}(x)$$

ـــ نحاول تكوين دالة من درجة انتماء عنصر واحد بالنسبة لفئتين مختلفتين لتعطي درجة انتماء العنصر بالنسبة لاتحاد الفئتين

~~عند استنتاج أي دالة لأي عملية لابد أنه تحقق~~

- عند إستنتاج أي صورة لأي دالة لابد أن تحقق الشروط :-

S-norm axioms

$\boxed{1}$ $S(1,1) = 1$; $S(0,a) = S(a,0) = a$; $a = \mu_A(x)$

$\boxed{2}$ $S(a,b) = S(b,a)$

$\boxed{3}$ $a \leq \grave{a}$; $b \leq \grave{b}$

$S(a,b) \leq S(\grave{a},\grave{b})$

$\boxed{4}$ $S(S(a,b,c)) = S(a, S(b,c))$

$\boxed{1}$ Domb class :-

$$S_\lambda(a,b) = \frac{1}{1 + \left[\left(\frac{1}{a}-1\right)^{-\lambda} + \left(\frac{1}{b}-1\right)^{-\lambda}\right]^{\frac{-1}{\lambda}}}$$

$$a < \lambda < \infty$$

2 Dubois-Prade class :-

$$S_\alpha(a,b) = \frac{a+b-ab-\min(a,b,1-\alpha)}{\max(1-a,1-b,\alpha)}$$

3 Yager class :-

$$S_w(a,b) = \min\left[1, (a^w+b^w)^{1/w}\right] ; 0 < w < \infty$$

ـــ النوع الأول من المسائل على هذه الجزئية أن يعطى صورة والمطلوب أن تحقق الشروط الأربعة.

ـــ النوع الثانى أن يعطى فئتان إما فترات وإما متقطعة والمطلوب حساب الإتحاد باستخدام الصور السابقة.

$\boxed{\text{Ex}}$ show that Dombi union operation satisfy S-norm operator.

solution

$$S_\lambda(a,b) = \frac{1}{1+\left[\left(\frac{1}{a}-1\right)^{-\lambda}+\left(\frac{1}{b}-1\right)^{-\lambda}\right]^{-1/\lambda}}$$

$a = \mu_A(x) \qquad ; \quad b = \mu_B(x)$

ـــ نأخذ الشروط:-

$\boxed{1}$

$$S[1,1] = 1 \quad ; \quad S(0,a) = \frac{1}{1+\left[0+\left(\frac{1}{a}-1\right)^{-\lambda}\right]^{-1/\lambda}}$$

$$\cancel{S(0,a) = \frac{1}{1+\frac{a}{1-a}}}$$

$$1+\left(\frac{1}{a}-1\right)^{+} = \frac{1}{a} \qquad \therefore S(0,a) = a$$

$$S(a,0) = a \qquad \Rightarrow \therefore S(0,a) = S(a,0) = a$$

$\boxed{2}$

$$S(a,b) = \frac{1}{1+\left[\left(\frac{1}{a}-1\right)^{-\lambda}+\left(\frac{1}{b}-1\right)^{-\lambda}\right]^{\frac{-1}{\lambda}}}$$

$$= \frac{1}{1+\left[\left(\frac{1}{b}-1\right)^{-\lambda}+\left(\frac{1}{a}-1\right)^{-\lambda}\right]^{\frac{-1}{\lambda}}} = S(b,a)$$

$\boxed{3}$ $a \leq \grave{a} \; ; \; b \leq \grave{b} \Rightarrow S(a,b) \leq S(\grave{a},\grave{b})$

$$a \leq \grave{a} \Rightarrow \frac{1}{a} \geq \frac{1}{\grave{a}}$$

$$\hookrightarrow \frac{1}{a} - 1 \geq \frac{1}{\grave{a}} - 1$$

$$\left(\frac{1}{a} - 1\right)^{\lambda} \geq \left(\frac{1}{\grave{a}} - 1\right)^{\lambda} \Rightarrow \left(\frac{1}{a} - 1\right)^{-\lambda} \leq \left(\frac{1}{\grave{a}} - 1\right)^{-\lambda}$$

بالمثل

$$\left(\frac{1}{b} - 1\right)^{-\lambda} \leq \left(\frac{1}{\grave{b}} - 1\right)^{-\lambda}$$

$$\underbrace{\left(\frac{1}{a} - 1\right)^{-\lambda} + \left(\frac{1}{b} - 1\right)^{-\lambda}}_{*} \leq \underbrace{\left(\frac{1}{\grave{a}} - 1\right)^{-\lambda} + \left(\frac{1}{\grave{b}} - 1\right)^{-\lambda}}_{**} \rightarrow *$$

$$\left[\; * \;\right]^{\frac{-1}{\lambda}} \geq \left[\; ** \;\right]^{\frac{-1}{\lambda}}$$

$$1 + \left[\; * \;\right]^{\frac{-1}{\lambda}} \geq 1 + \left[\; ** \;\right]^{\frac{-1}{\lambda}}$$

$$\frac{1}{1+\left[\ *\ \right]^{\frac{-1}{\lambda}}} \leqslant \frac{1}{1+\left[\ **\ \right]^{\frac{-1}{\lambda}}}$$

$$\Rightarrow S(a,b) \leqslant S(a',b')$$

$\boxed{4}$ $$S\left(S(a,b),\, c\right) = S\left(a,\, S(b,c)\right) \quad ?$$

$$\underline{L.H.S} = S\left(S(a,b),\, c\right) = \frac{1}{1+\left[\left(\frac{1}{S(a,b)}-1\right)^{-\lambda} + \left(\frac{1}{c}-1\right)^{-\lambda}\right]^{\frac{-1}{\lambda}}}$$

$$\frac{1}{S(a,b)} = 1+\left[\left(\frac{1}{a}-1\right)^{-\lambda} + \left(\frac{1}{b}-1\right)^{-\lambda}\right]^{\frac{-1}{\lambda}}$$

$$\left(\frac{1}{S(a,b)}-1\right)^{-\lambda} = \left(\frac{1}{a}-1\right)^{-\lambda} + \left(\frac{1}{b}-1\right)^{-\lambda}$$

$$L.H.S = \frac{1}{1+\left[\left(\frac{1}{a}-1\right)^{-\lambda} + \left(\frac{1}{b}-1\right)^{-\lambda} + \left(\frac{1}{c}-1\right)^{-\lambda}\right]^{\frac{-1}{\lambda}}} \quad \boxed{1}$$

$$S\big(a, S(b,c)\big) = R.H.S$$

$$= \frac{1}{1+\left[\left(\frac{1}{a}-1\right)^{-\lambda}+\left(\frac{1}{S(b,c)}-1\right)^{-\lambda}\right]^{\frac{-1}{\lambda}}}$$

$$S(b,c) = \frac{1}{1+\left[\left(\frac{1}{b}-1\right)^{-\lambda}+\left(\frac{1}{c}-1\right)^{-\lambda}\right]^{\frac{-1}{\lambda}}}$$

$$\left(\frac{1}{S(b,c)}-1\right)^{-\lambda} = \left(\frac{1}{b}-1\right)^{-\lambda}+\left(\frac{1}{c}-1\right)^{-\lambda}$$

بالتعويض

$$R.H.S = \frac{1}{1+\left[\left(\frac{1}{a}-1\right)^{-\lambda}+\left(\frac{1}{b}-1\right)^{-\lambda}+\left(\frac{1}{c}-1\right)^{-\lambda}\right]^{\frac{-1}{\lambda}}}$$

$$R.H.S = L.H.S \quad //$$